ASUPRA VIBRAȚIILOR SISTEMELOR MECANICE CU ELASTICITATE NELINIARĂ

Ghiorghe CAUTES, Gheorghe OPROESCU, Catalin Stefan CAUTES
Dunarea de Jos University of Galati, E-mail cautes.gheorghe@ugal.ro

Keywords: Elastically systems, non-linearity, oscillations.

Abstract
The work shows that the differential equation that describes the movement in time of a non-linear oscillator with the non-linear elastic force can be reduced to a Duffing equation.

1. FUNDAMENTAREA TEORETICA

In cele ce urmeaza se demonstrează că ecuatia diferentială care descrie miscarea în timp a unui oscillator neliniar cu forța elastică de forma

$$F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \tag{1}$$

se poate reduce la o ecuatie diferentiala de tip Duffing.

Vibrațiile unui sistem mecanic cu forța elastică neliniară descrisa de (1) sunt caracterizate de ecuația diferențială

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=F_0\cos(\omega t) \tag{2}$$

în care m, x, k, $F_0\cos\omega t$ sunt masa, deplasarea, coeficientul de amortizare, respectiv forța armonică de excitație.

Prin substitutia

$$x=y-\frac{a_2}{3a_3}, \quad a_3\neq 0$$

tinând seamă că $\dot{x}=\dot{y}, \ddot{x}=\ddot{y}$ şi înlocuind în (2) se obține

$$m\ddot{y}+k\dot{y}+a_1\left(y-\frac{a_2}{3a_3}\right)+a_2\left(y-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2+a_3\left(y-\frac{a_2}{3a_3}\right)^3=F_0\cos(\omega t)$$

ecuație în care coeficientul lui y^2 este

$$a_2-a_3\frac{3a_2}{3a_3}=0$$

Rezultă

$$m\ddot{y}+k\dot{y}+b_1y+b_2y^3=F_0\cos(\omega t)+F_1 \tag{3}$$

unde

$$b_1 = a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}; \quad b_2 = a_3; \quad F_1 = \frac{a_1 a_2}{3a_3} \; \frac{2a_2^3}{27a_3^2};$$

Notând $\beta = b_2/b_1$, $b_1 \neq 0$, scriem (3) sub forma

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + b_1\left(1 + \beta y^2\right)y = F_0 \cos(\omega t) + F_1 \tag{4}$$

şi notând $\sigma = pt$, $p = \sqrt{\frac{b_1}{m}}$, pulsația proprie a sistemului elastic liniar fara amortizare obținem

$$\frac{d\sigma}{dt} = p, \quad y' = \frac{dy}{d\sigma} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\sigma} = \dot{y}\frac{1}{p}$$

deci $\dot{y} = y'p$, apoi

$$y'' = \frac{d}{d\sigma}(y') = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\dot{y}}{p}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{p}\right)\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\ddot{y}}{p}\frac{1}{p} = \frac{\ddot{y}}{p^2}$$

de unde

$$\ddot{y} = p^2 y''$$

Revenind în (4) se obtine

$$mp^2 y'' + kpy' + b_1\left(1 + \beta y^2\right)y = F_0 \cos\left(\frac{\omega\sigma}{p}\right) + F_1$$

ecuația care împarțită prin $mp^2 = b_1$ devine

$$y'' + k_1 y' + \left(1 + \beta y^2\right)y = h_0 \cos\left(\frac{\omega\sigma}{p}\right) + F_2 \tag{5}$$

cu $k_1 = \frac{k}{mp}$ = amortizare relativă;

$h_0 = \frac{F_0}{b_1}$ = amplitudinea relativă a excitației;

$F_2 = \frac{F_1}{b_1}$

Introducând pulsația relativă $\Omega = \dfrac{\omega}{p}$ în (5) rezultă

$$y'' + k_1 y' + \left(1 + \beta y^2\right)y = h_0 \cos(\Omega\sigma) + F_2 \tag{6}$$

ecuație de tip Duffing pentru care există metode de rezolvare numerice sau analitice aproximative.

Trecerea de la coeficienții ecuației (1) la coeficienții ecuației (6) se face prin relatiile de legatura

$$k_1 = \frac{k\sqrt{3a_3}}{\sqrt{m\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)}} = k\sqrt{\frac{3a_3}{m\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)}}; \quad \beta = \frac{3a_3^2}{\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)};$$

$$h_0 = \frac{3a_3F_0}{\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)}; \quad \Omega = \omega\sqrt{\frac{3a_3m}{\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)}}; \quad F_2 = \frac{a_2\left(9a_1a_3 - 2a_2^2\right)}{9a_3\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)}$$

Studiind aceste relatii de legatura se observă necesitatea verificării unor condiții de existentă pentru fractii şi radicali care se vor face inainte de rezolvarea problemei. In esenta conditiile se refera la $\dfrac{a_3}{\left(3a_1a_3 - a_2^2\right)} > 0$, $\left(3a_1a_3 - a_2^2\right) \neq 0$, valabile pentru tot setul de relatii de legatura. Din start s-a pus conditia suplimentara $a_3 \neq 0$ fara de care toata demonstratia de mai sus nu ar avea nici un sens.

2. APLICATIE

Exemplul numeric urmator va arata că ecuațiile (1) şi (6) rezolvate prin aceeaşi metodă (Runge – Kutta) sau metode diferite (Runge – Kutta respectiv metoda balanței armonice) au aceeaşi soluție.

S-a ales un oscilator cu caracteristica neliniara asimetrica si care trece prin origine, descrisa de graficul si datele concrete din figura nr. 1. Unitatile de masura ale coeficientilor a_1, a_2, a_3 rezulta din respectarea dimensiunilor fiecarui termen al expresiei (1), respectiv $[a_1] = N/m$, $[a_2] = N/m^2$, $[a_3] = N/m^3$.

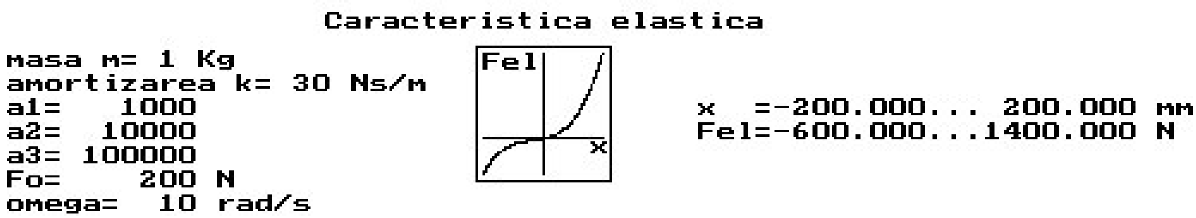

Figura 1. Caracteristica elastica a oscilatorului

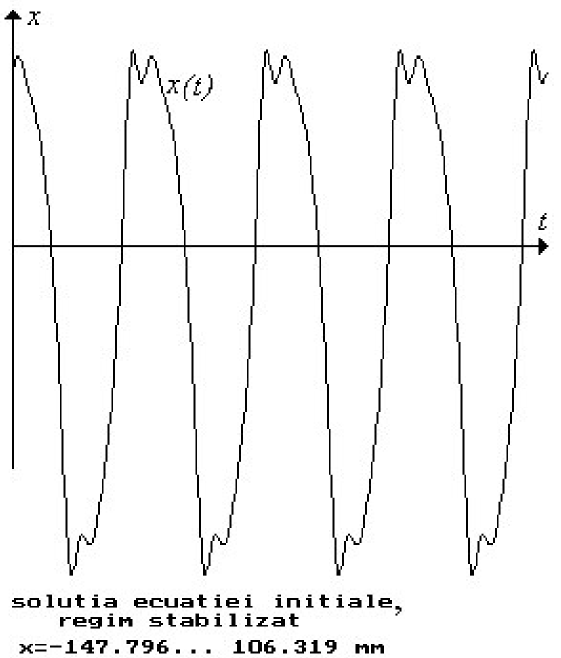

Figura 2. Solutia ecuatiei initiale (2) obtinuta pe cale numerica.

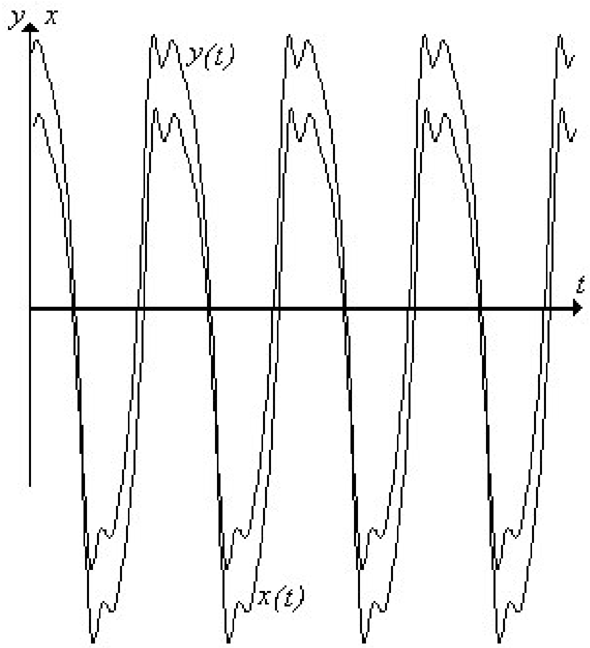

Figura 3. Solutiile ecuatiei (6) de forma $y(t)$ ***sau*** $x(t)$***, la aceeasi scara ca in figura 2.***

Bibliografie

[1] Bratu P. – Vibratiile sistemelor elastice, Editura Tehnica, Bucuresti, 2000

[2] Cautes Gh, Ghelase D, Cautes C. – Consideratii privind precizia solutiilor aproximative ale ecuatiilor diferentiale neliniare cere descriu vibratiile unui sistem elastic. Al VII – lea Simpozion National de utilaje pentru constructii, sectia Cercetari fundamentale si aplicative in domeniul ingineriei mecanice, vol.I, Bucuresti, 2001

[3] Cautes Gh, Oproescu Gh, Nastac S. Oscillators Hysterezis and Elastic Unlinearity. 3rd International Conference of PhD Students, University of Miskolc, Hungary, 13-19 August 2001, ISBN 963 661 480 6, ISBN 963 661 482 2, pg. 47-50.

[4] Cautes Gh, Oproescu Gh, Ghelase D. – Evaluarea cantitativa a neliniaritatilor elastice ale oscilatoarelor mecanice. Buletinul Stiintific a celei de a XXVI – a Conferinte Nationale de Mecanica Solidelor, Sectiunea Vibratii si propagari de unde, Braila, 2002

[5] Cautes Gh. Dinamica proceselor mecanice cu socuri si vibratii. Editura Academica, Universitatea “Dunarea de Jos” din Galati, 2004, ISBN 973-8316-46-4.

[6] Voinea R, Voiculescu D. – Vibratii mecanice. Institutul Politehnic, Bucuresti, 1979

[7] Zeveleanu C, Bratu P. – Vibratii neliniare. Editura Impuls, Bucuresti, 2001, ISBN 973-8132-10-x